ЛЕКЦИЯ 8.
Релятивистская динамика

А.И. Валишев, В.Г. Сербо .

16. Релятивистские энергия, импульс.

16.0. Релятивистское обобщение классического импульса.

Необходимым свойством 4 – е вектора в релятивистской динамике является ковариантность вектора относительно преобразований Лоренца.

Нерелятивистский 3-х мерный вектор импульса не является пространственной частью некоторого Лоренц ковариантного 4 –вектора. Поэтому для пространственной части импульса несправедлив закон сохранения. Следовательно нарушается ковариантность законов динамики.

Релятивистским обобщением 3-х вектора импульса является 4 –вектор в котором произведена замена классического 3-х мерного вектора скорости частицы *v* на релятивистский 4 – вектор скорости u_μ :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\, d\mathbf{r}/d\mathbf{t}\,, \quad \mathbf{v} \to u_\mu\,, \; \mathbf{p} \to p_\mu\,,$$

$$p_\mu = m\, dx_\mu/d\tau\,;$$

$$p_\mu = (p_0\,, \mathbf{p}\,) = (mu_0\,, m\mathbf{u}\,)\,;$$

$$p_0 = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,, \; \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,.$$

$$p_0 = mc\,/(1-\mathbf{v}^2/c^2)^{1/2}\,, \mathbf{p} = m\mathbf{v}\,/\,(1-\mathbf{v}^2/c^2)^{1/2}\,.$$

16. Релятивистские энергия, импульс.

16.1.1. Свойства 4 – вектора энергии – импульса.

Df. **4 компоненты вектора p_μ являются компонентами релятивистского Лоренц ковариантного 4 – вектора энергии – импульса. Действительно, определим нулевую компоненту 4 – вектора p_0 как:**

$$p_\mu = (p_0, \vec{p}), \qquad \mu = 0, 1, 2, 3;$$

$$p_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc\gamma, \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\vec{v}\gamma.$$

Df. **ε - называется релятивистской энергией свободной частицы.**

В пределе $v \to 0$ $\varepsilon = \varepsilon_0 = mc^2$ называется энергией покоя.

Соотношение скорости частицы с энергией согласно определениям:

$$\mathbf{v} = \mathbf{p}\, c^2/\varepsilon\,.$$

$$\varepsilon = cp_0 = c\frac{mc}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\,.$$

Экспериментальный факт:
Во всех элементарных процессах – распадах, рождениях частиц в соударениях строго выполняются:

a) **сохранение релятивистского пространственного импульса** $\vec{p}$**;**

b) **релятивистской энергии.**

В результате реакции (распада, объединения) число частиц может измениться по сравнению с исходным $N \neq N'$**, однако полный начальный импульс и конечный импульсы в точности одинаковы. Так же и энергия.**

$$\sum_i^N \varepsilon_i = \sum_j^{N'} \varepsilon'_j\,; \qquad \sum_i^N \boldsymbol{p_i} = \sum_j^{N'} \boldsymbol{p'_j}\ .$$

Энергия, импульс являются компонентами единого 4 – вектора $\mathscr{P} = p_\mu$**.**
Закон сохранения приобретает более простой вид:

$$\sum_i^N (p_\mu)_{\boldsymbol{i}} = \sum_j^{N'} (p_\mu)'_{\boldsymbol{j}}\ .$$

Индекс $\mu = 0, 1, 2, 3$**, или** $0, x, y, z$**.**

16.1.2. Преобразования Лоренца компонент 4-е вектора энергии-импульса.

Df. **Компоненты 4 – вектора энергии - импульса преобразуются по правилам преобразования Лоренца:**
0- **я компонента является аналогом** $x_0 = ct$ **.**
Пространственные компоненты импульса аналогичны компонентам 3-х мерного радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ **.**

Преобразование Лоренца $S' \to S$.
Нулевая компонента 4 –вектора $\varepsilon' = cp_0'$.
$\varepsilon = \gamma(\varepsilon' + Vp_x')$, $p_x = \gamma(p_x' + V/c^2\varepsilon')$, $p_y = p_y'$, $p_z = p_z'$.
Здесь релятивистский фактор γ**:**

$$\gamma(V) = 1/(1\text{-}V^2/c^2)^{1/2}\,.\ \gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

Обратные преобразования $S \to S'$: $(\varepsilon = cp_0)$
$\varepsilon' = \gamma(\varepsilon - Vp_x)$, $p_x' = \gamma(p_x - V/c^2\varepsilon)$, $p_y' = p_y$, $p_z' = p_z$.

16.1.2. Преобразования Лоренца компонент 4-е вектора энергии-импульса.

Квадрат 4 –вектора импульса является инвариантом преобразований Лоренца:

$$\mathcal{P}^2 = (p_\mu)^2 = p_0{}^2 - \boldsymbol{p}^2 =$$

$$= (\varepsilon/c^2) - \boldsymbol{p}^2 = m^2c^2 = inv\ .$$

Из соотношения $(\varepsilon/c^2) - \boldsymbol{p}^2 = m^2c^2$ **следует:**

$$\varepsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + \boldsymbol{p}^2c^2} = \sqrt{m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2}\ .$$

Df. **Назовем кинетической энергией – разность между полной энергией и энергией покоя:**

$$K = \varepsilon - mc^2\ .$$

См. графики: $K(v^2)$, $p(v)$.

**Квадрат 4-вектора составляется по правилу квадрат нулевой компоненты минус! квадрат пространственной*

$$\left(A_\mu\right)^2 = A_0^2 - \vec{A}^2\ .$$

16.1.3. Пределы $K(v^2)$, $p(v)$ при $v \to 0$, в нерелятивистском приближении.

Выполняется разложение по малости $v/c << 1$.

$$\gamma(v) = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$$

Получаем в пределе при $v \to 0$**:**

$$\varepsilon \cong mc^2 + (1/2)mv^2 = mc^2 + K_{cl} ;$$

$$K_{cl} = (1/2)\, mv^2 ; \; p = mv .$$

Кинетическая энергия и импульс имеют правильный нерелятивистский вид.

16.1.4. Ультрарелятивистские пределы $\boldsymbol{\varepsilon}(v^2)$, $p(v)$.

При $v \to c$, $\boldsymbol{\varepsilon} \to \infty$, $p \to \infty$.

$$\varepsilon >> mc^2 \to \varepsilon \approx |\mathbf{p}|c \to \infty .$$

Для произвольной частицы с Лоренц фактором

$$\gamma(v) = 1/(1-v^2/c^2)^{1/2} \to$$

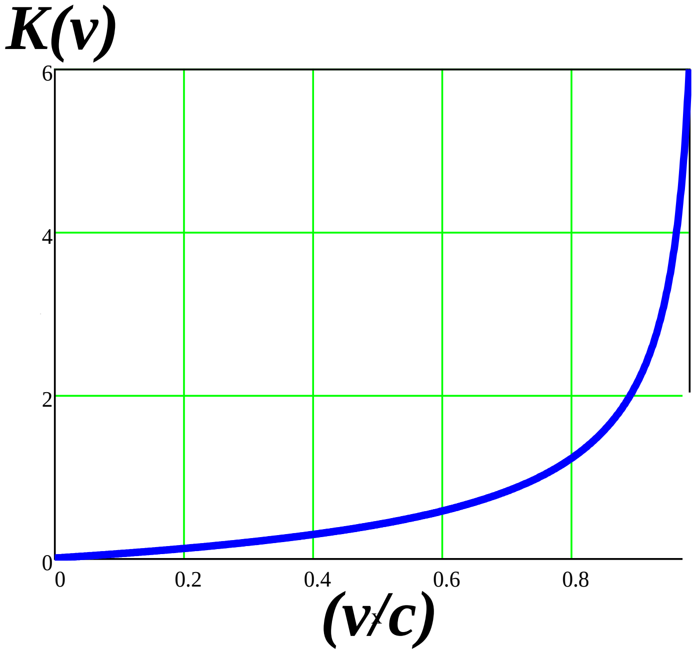
$$\varepsilon = \gamma(v) \cdot mc^2 ,$$

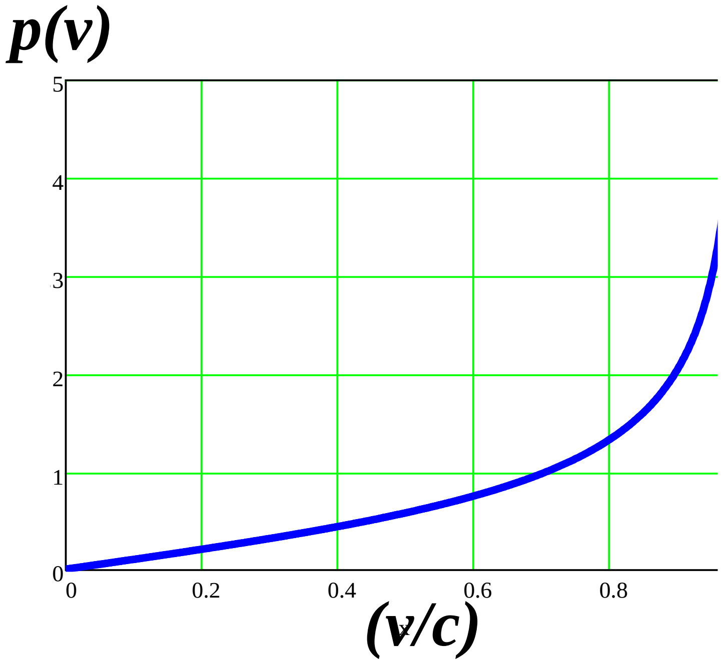
$$\mathbf{p}(v) = \gamma(v) \cdot m\mathbf{v} .$$

Df. **Кинетическая энергия – разность между полной энергией и энергией покоя:**

$$K = \varepsilon - mc^2 \ .$$

Графики: $K(v)$, $p(v)$.





16.2. Сравнение релятивистского и нерелятивистского столкновения (распада).

Пример. **Столкновение частицы массы m_1 с покоящейся частицей массы m_2 с образованием составной частицы X.**

Нерелятивистский предел.

1. **Сохранение импульса:**

$$m_1\mathbf{v}_1 = M\,\mathbf{V};$$

2. Объединение массы в X:

$m_1 + m_2 = M$;

3. Скорость объединенной частицы X- скорость центра масс системы:

$\mathbf{V} = \mathbf{p}_\Sigma / (m_1 + m_2) =$

$= m_1\mathbf{v}_1 / (m_1 + m_2)$.

Релятивистский предел.

1. Сохранение 4 – вектора энергии – импульса:

$$\gamma_1 m_1 c^2 + \gamma_2 m_2 c^2 = \gamma M c^2,\ \gamma = \gamma(V) =$$

$$= 1/(1-V^2/c^2)^{1/2};\ \gamma_1 = \gamma(v_1),\ \gamma_2 = \gamma(v_2);$$

$$\sum_i \mathbf{p_i} = \gamma_1 m_1 \mathbf{v}_1 + 0 = \gamma M\,\mathbf{V}$$

2. Масса составной частицы X:

$M > m_1 + m_2$.

3. Скорость объединенной частицы X- скорость центра инерции системы согласно $\mathbf{v} = (\mathbf{p}\,c^2/\varepsilon)$:

$V_{ци} = (\sum_i \mathbf{p_i})\cdot \mathbf{c}^2 / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) =$

$= (\gamma_1 m_1 \mathbf{v}_1 + (\gamma_2 m_2 \mathbf{v}_2 = 0)) / (\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2);$

$\gamma_i = \gamma(v_i) = 1/(1-v_i^2/c^2)^{1/2}$

16.3. Релятивистская сила.

Df. Релятивистскую силу следует рассчитывать (измерять) как скорость изменения импульса.

$$\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt\ .$$

Дифференцируя релятивистский импульс получаем:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3\frac{(\vec{a}\vec{v})}{c^2}\vec{v} \quad (*)\ .$$

Упражнение. Получить формулу (*).

Частные случаи.

1. Ускорение параллельно скорости $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{a}$.

$$\boldsymbol{F} = m\gamma^3\,\boldsymbol{a}\ .$$

2. Ускорение перпендикулярно скорости $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{F} = m\gamma\ \boldsymbol{a}\ .$$

Df. Элементарная работа силы определяется как произведение силы на элемент пути:

$$dA = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = (d\boldsymbol{p}/dt)\cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{p}\ c^2/\varepsilon)\cdot d\boldsymbol{p} =$$

$$= c\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{p}\,/(m^2c^2 + \boldsymbol{p}^2)^{1/2} = d\varepsilon\ .$$

Работа на конечном пути как и в классической динамике:

$$A_{12} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = K_2 - K_1$$

17. Безмассовая частица фотон (γ квант).

В классической нерелятивистской механике безмассовых частиц не существует.

Из $m = 0$ **немедленно следует** $\rightarrow$ $\boldsymbol{p} = 0$, $K = 0$**.**

VS **релятивистская механика.**

$$\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + \boldsymbol{p}^2c^2} \; , \qquad \longrightarrow \qquad \varepsilon(m = 0) = |\boldsymbol{p}|c \, .$$

Если $\varepsilon = |\boldsymbol{p}|c$, **то согласно** $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{p}\, c^2/\varepsilon)$ **скорость:** $v = c!$

В природе безмассовая частица существует. Это фотон – квант электромагнитного поля, частица – переносчик электромагнитного взаимодействия.

Электромагнитная волна с частотой ω **является потоком фотонов.**

Df. **Энергия фотона (**γ **– кванта)** $\varepsilon = \hbar\omega$,

Импульс фотона $|\boldsymbol{p}| = \boldsymbol{\varepsilon}/c = \hbar\omega/c$.

Энергия и импульс фотона являются компонентами релятивистского 4 – вектора, который допускает преобразования Лоренца.

17. Безмассовая частица фотон.

Пример. Эффект Допплера.

В системе $\boldsymbol{S'}$ фотон имеет импульс с компонентами:

$$\boldsymbol{p'} = (p_x', p_y', 0) = \varepsilon'/c\,(\cos\varphi', \sin\varphi', 0).$$

Энергия фотона – будучи *0-й* компонентой 4 –вектора из $\boldsymbol{S'}$ в систему S преобразуется согласно правилам Лоренц преобразования:

$$\varepsilon = \gamma(\varepsilon' + V p_x') = \gamma\,\varepsilon'(1 + V/c\cos\varphi').$$

Учитывая

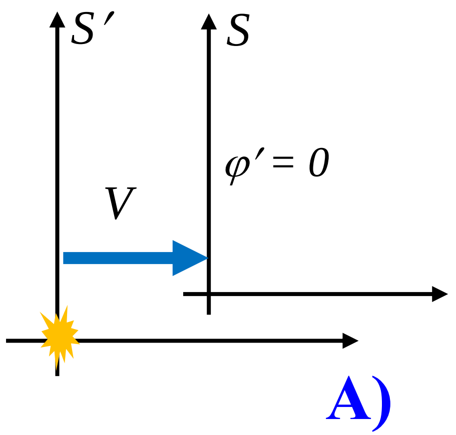
$$\varepsilon = \hbar\omega, \quad \varepsilon' = \hbar\omega'$$

получаем формулу для частоты по эффекту Допплера :

$$\omega = \omega' \cdot \frac{1 + (V/c)cos\varphi'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

17.1. Эффект Допплера.

Получено: $$\omega = \omega' \cdot \frac{1+(V/c)\cos\varphi'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}.$$



Частные случаи.

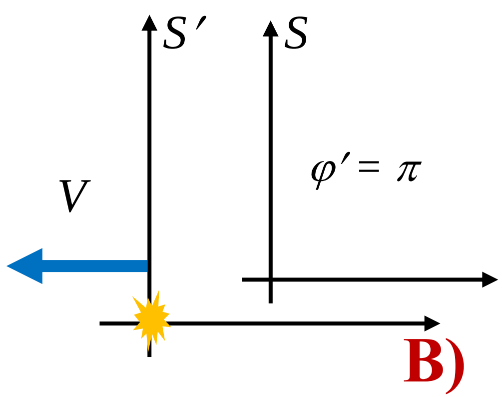
A) Приближение источника фотонов ∈ S'

$\varphi' = 0 \rightarrow \cos(\varphi') = 1$

$$\omega = \omega' \cdot \frac{1+(V/c)}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \omega' \cdot \sqrt{\frac{1+(V/c)}{1-(V/c)}}. \qquad \omega > \omega'.$$

Наблюдается смещение частоты в область бо′льших частот =
= фиолетовую область «синее смещение».

В нерелятивистском пределе $V << c, \rightarrow \omega \simeq \omega'(1+V/c)$.



B) Удаление источника излучения ∈ S'

$\varphi' = \pi \rightarrow \cos(\varphi') = -1$

$$\omega = \omega' \cdot \frac{1-(V/c)}{\sqrt{1-(V/c)^2}} = \omega' \cdot \sqrt{\frac{1-(V/c)}{1+(V/c)}}. \quad \omega < \omega'.$$

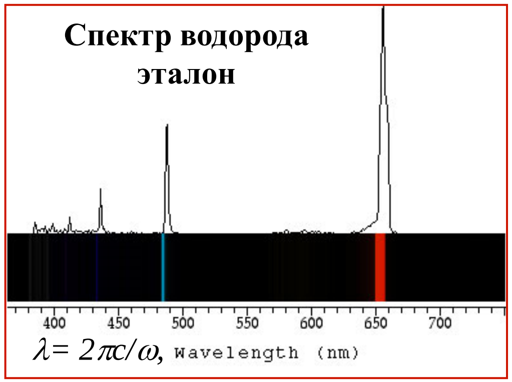
Наблюдается смещение частоты в красную область - «красное смещение» .

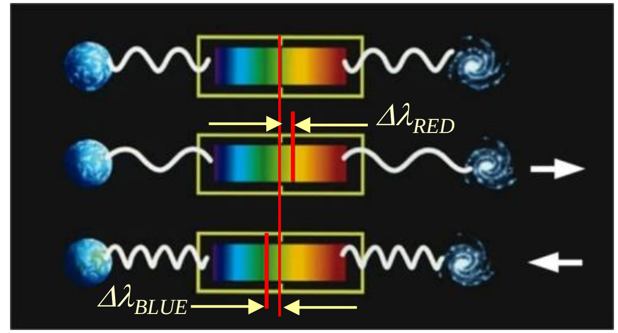
В нерелятивистском пределе $V << c, \rightarrow \omega \simeq \omega'(1 - V/c)$.

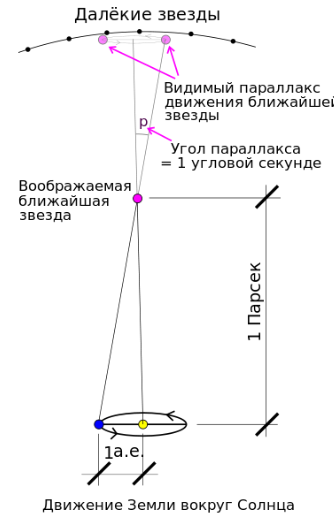
17.2. Красное смещение. Закон Хаббла.

Э. Хаббл, 1929.
Красное смещение

$$\frac{\omega' - \omega}{\omega} = \frac{H_0}{c} r$$

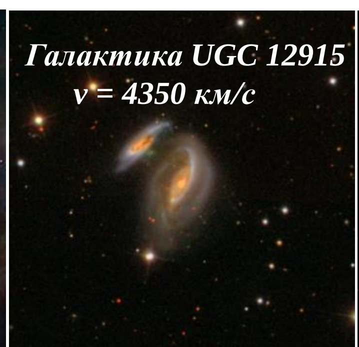


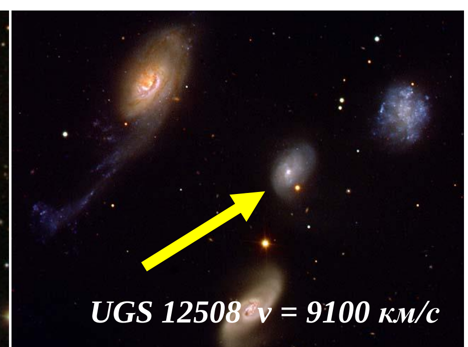


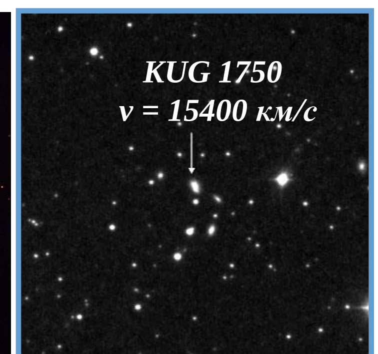


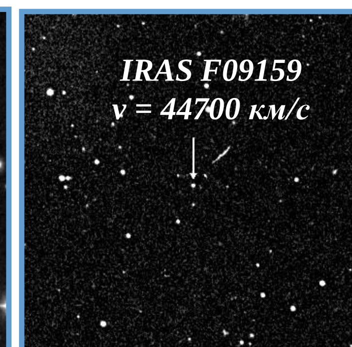
$$V = H_0 \cdot D$$

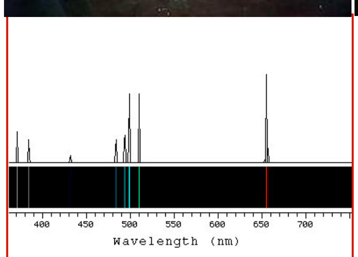
H_0=73.8±2.4 км/с/Мпк
D – расстояние до объекта
1 Мпк = 3.08×10^{19} км = 3.26×10^{6} св. лет

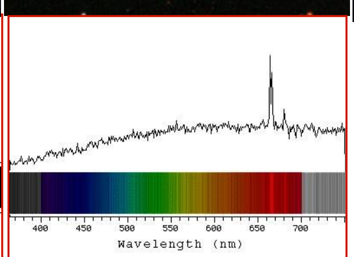


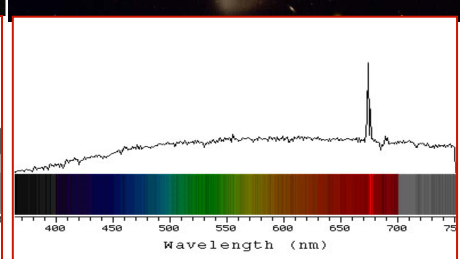


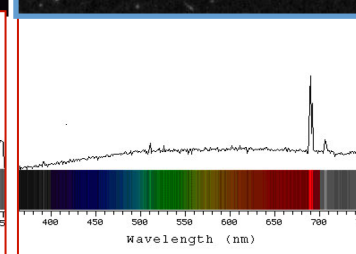


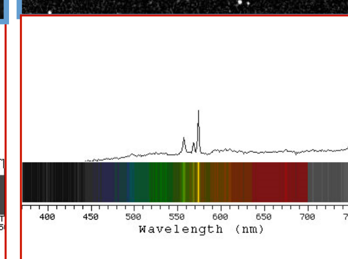












СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

http://phys.nsu.ru/fit

http://el.nsu.ru